Лекция 9. Моделирование ординарных потоков событий.

Свойства потоков событий

При исследовании реальных систем методом имитационного моделирования часто приходится вырабатывать случайные потоки, имитирующие закономерности появления определенного вида событий: прибытия самолетов в аэропорт, отказы в работе сложного электронного устройства, вызовы на телефонной станции и т.д.

Приведем следующее определение. Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени.

Поток событий можно графически представить как последовательность моментов t_1, t_2,… на временной оси 0_t (рисунок 6).

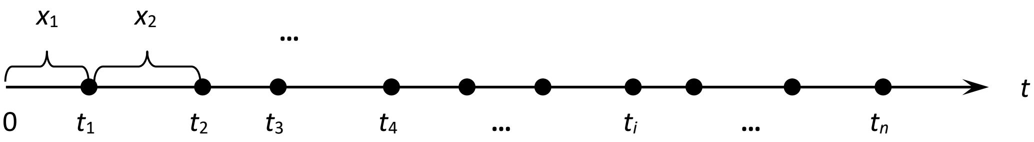

Рисунок 6

Тогда интервалы времен x_j между событиями в общем случае являются реализациями составляющих векторной случайной величины $\eta = (\eta_1, \eta_2,\ldots, \eta_n)$ с многомерным законом распределения

$$F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{\eta_1 < x_1, \eta_2 < x_2, ..., \eta_n < x_n\}.$$

Потоки событий обладают различными свойствами, которые позволяют определить типы потоков.

Прежде всего потоки могут быть однородными и неоднородными. Например, поток телеграмм, принятых от граждан неоднороден, так как телеграммы с грифом "молния" передаются на аппарат вне очереди. Однако во многих случаях неоднородные потоки можно представить (рисунок 7) в виде наложения нескольких однородных потоков.

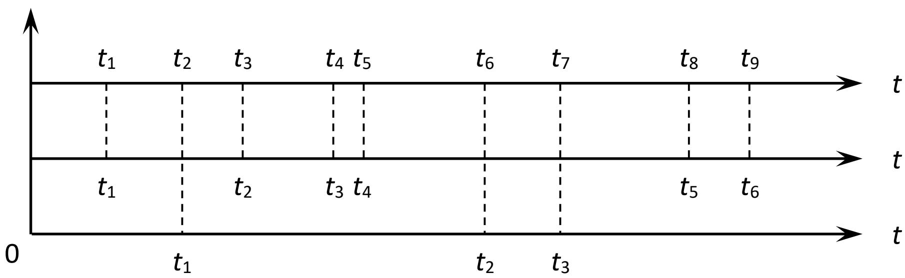

Рисунок 7

Поток событий обладает свойством ординарности, если вероятность появления двух и более событий в течение элементарного интервала времени Δt есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале, т.е.

$$P_1(t, t + \Delta t) >> P_k(t, t + \Delta t),\ k = 2, 3, ...$$

Так как для любого интервала Δt

$$P_0(t, t + \Delta t) + P_1(t, t + \Delta t) + P_k(t, t + \Delta t) = 1,\ k > 1,$$

то для ординарного потока событий имеем

$$P_0(t, t + \Delta t) + P_1(t, t + \Delta t) \approx 1 \tag{53}$$

и $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_k(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Примерами ординарных потоков являются поток самолетов, прибывших в аэропорт, поток выстрелов по мишени и т.д. Примером неординарного потока событий может быть поток пассажиров, прибывающих на данную остановку троллейбуса.

Поток событий называется стационарным, если вероятность наступления определенного числа событий в течение интервала времени фиксированной длины зависит только от длительности этого интервала и не зависит от его расположения на временной оси.

Рассмотрим на оси времени ординарный поток событий и найдем среднее число событий, наступающих на интервале времени Δt. В соответствии с выражением (53) оно будет

$$0 * P_0(t, t+\Delta t) + 1 * P_1(t, t+\Delta t) = P_1(t, t+\Delta t).$$

Тогда среднее число событий, наступающих в единицу времени, составит

$$\frac{P_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Рассмотрим предел последнего выражения при $\Delta t \to 0$. Если этот предел существует, то он называется интенсивностью ординарного потока

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Интенсивность $\lambda(t)$ имеет размерность, обратную времени.

Для стационарного потока, в отличие от нестационарного, его интенсивность не зависит от времени, т.е. $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$.

Поток событий обладает свойством отсутствия последействия, если для любых двух непересекающихся интервалов времени τ_1 и τ_2 (рисунок 8) число событий, попавших на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. По сути это означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга, вызванные каждое своими собственными причинами. Например, поток людей, обращающихся в адресное бюро, практически не имеет последействия, так как отсутствует зависимость между причинами, вызвавшими приход каждого из них в бюро. А вот поток людей, получивших справку, уже имеет последействие, так как на обслуживание каждого посетителя потребуется интервал времени, не меньший, чем минимальное время выписки справки.

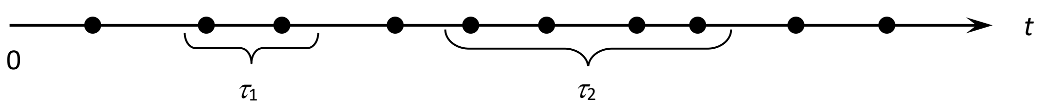

Рисунок 8

Поток событий называется потоком с ограниченным последействием, если длины интервалов между его событиями $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ взаимно независимые случайные величины и, следовательно, их совместную функцию плотности (в предположении, что η_j, $j = \overline{1,n}$ – непрерывные величины) можно представить в виде

$$f_\eta(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) * f_2(x_2) * ... * f_n(x_n). \qquad (54)$$

А для стационарных потоков с ограниченным последействием справедливо также соотношение

$$f_1(x_1) \neq f_2(x_2) = f_3(x_3) = ... = f_n(x_n) = f(x),$$

означающее равенство распределений всех интервалов, кроме первого.

Смысл ограниченности последействия заключается в том, что функции $f_j\left(x_j\right)$ при $j > 1$ являются условными функциями плотности величин η_j при условии, что в начальный момент j-го интервала ($j > 1$) наступило событие. Исключение составляет лишь функция $f_1\left(x_1\right)$, которая является безусловной функцией плотности первого интервала, так как относительно появления или непоявления события в начальный момент времени не делается никаких предположений.

Моделирование простейшего потока

Простейшим потоком называется пуассоновский поток событий, который кроме свойств ординарности и отсутствия последействия обладает также свойством стационарности. Название "простейший" обусловлено тем, что процессы, связанные с этими потоками, имеют наиболее простое математическое описание.

Простейший поток занимает центральное место среди всего многообразия потоков, так как при наложении достаточно большого числа независимых потоков (сравнимых между собой по интенсивности) получается поток, близкий к простейшему.

Как следует из определения, число событий простейшего потока является дискретной случайной величиной и подчиняется рсапределения Пуассона. Следовательно, вероятность наступления на некотором интервале τ определенного числа событий, например k, находится по формуле

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad (55)$$

где $a = \lambda\tau$ - среднее число событий за время τ.

Найдем закон распределения интервала η между любыми двумя соседними событиями простейшего потока

$F(x) = P\{\eta < x\}$.

Как следует из рисунка 9 вероятности $P\{\eta < x\}$ соответствует случай, когда на интервал x попадает хотя бы одно событие простейшего потока, следовательно,

$$F(x) = P\{\eta < x\} = 1 - P\{\eta \geq x\} = 1 - P_0(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \qquad (56)$$

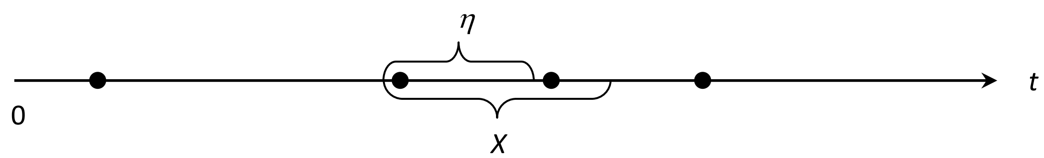

Рисунок 9

Дифференцируя (56), получим плотность распределения случайной величины η:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x}, \ (x > 0). \qquad (57)$$

Таким образом, в простейшем потоке интервал между любыми двумя соседними событиями распределен по экспоненциальному закону распределения с параметром λ.

Полученный результат ценен тем, что позволяет использовать для моделирования простейшего потока, как и впрочем любых потоков событий, изученный ранее аппарат для моделирования случайных величин с заданным законом рсапределения. Действительно, из рисунка 9 следует, что моменты появления событий случайного потока можно найти из выражения

$t_j = t_{j-1} + x_j$,

где x_j – реализация случайной величины η_j, закон распределения которой для простейшего потока был только что нами получен.

Алгоритм для моделирования простейшего потока включает следующие шаги:

Шаг 1. Положить $j = 1$.

Шаг 2. Получить реализацию z базовой случайной величины ξ.

Шаг 3. Определить значение интервала между соседними событиями простейшего потока с интенсивностью λ

$$x_j = -\frac{1}{\lambda}\ln z.$$

Шаг 4. Вычислить момент появления j-го события простейшего потока $t_j = t_{j-1} + x_j$.

Шаг 5. Принять $j = j + 1$.

Шаг 6. Проверить условие $j > n$. При нарушении этого условия возврат на шаг 2.

Шаг 7. Вывод результата моделирования $\{t_j\}$.

Моделирование потоков Эрланга

Потоки Эрланга обязаны своим названием датскому ученому, который ввел их для исследования процессов в телефонных системах. Потоки Эрланга обладают свойствами ординарности, стационарности и ограниченного последействия и получаются путем "просеивания" простейшего потока. Если в простейшем потоке сохранить каждое второе событие, а остальные отбросить, получится поток Эрланга второго порядка, а если сохраняется каждое k-е событие, то образуется поток Эрланга k-го порядка (рисунок 10).

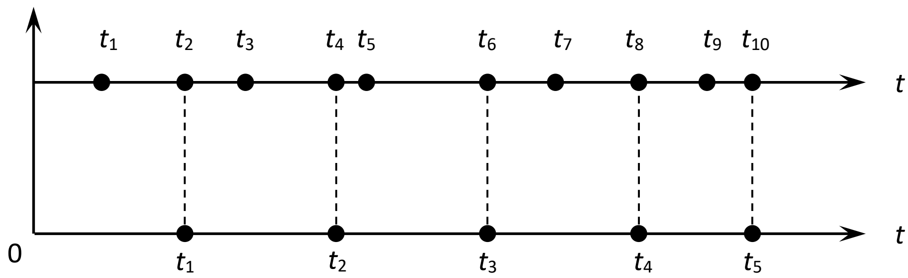

Рисунок 10

Очевидно, простейший поток является частным случаем потока Эрланга, когда $k = 1$.

Интервал η между соседними событиями потока Эрланга k-го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин η_i, распределенных по экспоненциальному закону

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \eta_i. \tag{58}$$

Функция плотности случайной величины η определяется формулой

$$f_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \ x > 0, \tag{59}$$

где λ – интенсивность простейшего потока.

Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение случайной величины η соответственно равны:

$$M[\eta] = M[\sum_{i=1}^{k} \eta_i] = \frac{k}{\lambda}, \ \ D[\eta] = D[\sum_{i=1}^{k} \eta_i] = \frac{k}{\lambda^2}, \ \ \sigma_\eta = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \tag{60}$$

Учитывая, что интенсивность потока Эрланга k-го порядка величина, обратная математическому ожиданию $\Lambda_k = \frac{1}{M[\eta]} = \frac{\lambda}{k}$, перепишем выражения (59) и (60) в окончательном виде

$$f_k(x) = \frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\Lambda_k x}, \; x > 0. \tag{61}$$

$$M[\eta] = \frac{1}{\Lambda_k}, \quad D[\eta] = \frac{1}{k\Lambda_k^2}, \quad \sigma_\eta = \frac{1}{\Lambda_k \sqrt{k}}. \tag{62}$$

Выясним, как будет вести себя поток Эрланга, если его порядок неограниченно увеличивать ($k \to \infty$), а интенсивность оставить без изменения (Λ_k = const). Из формул (62) видно, что математическое ожидание интервалов между событиями потока при этом остается постоянным, а дисперсия и среднеквадратическое отклонение стремится к нулю, т.е. поток Эрланга приближается к регулярному потоку с постоянными интервалами, равными $1/\Lambda_k$.

Это свойство потока Эрланга имеет важное практическое применение. Задаваясь различными значениями k, можно получить любую степень последействия: от полного отсутствия последействия при $k = 1$ до жесткой связи между моментами появления событий при $k \to \infty$. Следовательно, многие реальные потоки событий можно аппроксимировать потоком Эрланга, подбирая его порядок (k) таким образом, чтобы математическое ожидание и дисперсия обоих потоков примерно совпадали.

Моделирование потоков Эрланга, вполне удовлетворительных для практических целей, осуществляется по следующему алгоритму.

Шаг 1. Положить $j = 1$.

Шаг 2. Положить $i = 1$, $S = 1$.

Шаг 3. Получить реализацию z базовой случайной величины ξ.

Шаг 4. Принять $i = i + 1$ и $S = S * z$.

Шаг 5. Проверить условие $i > k$. При нарушении этого условия возврат на шаг 3.

Шаг 6. Вычислить длину интервала между событиями потока и момент появления события $x_j = -\frac{1}{\lambda} \ln S$, $t_j = t_{j-1} + x_j$.

Шаг 7. Принять $j = j + 1$.

Шаг 8. Проверить условие $j > n$. При нарушении этого условия возврат на шаг 2.

Шаг 9. Вывод $\{t_j\}$.

Основная литература: 1 [57-65]

Контрольные вопросы:

1. Какие потоки являются стационарными?
2. Какие потоки являются ординарными?
3. Приведите алгоритм моделирования простейшего потока.